შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

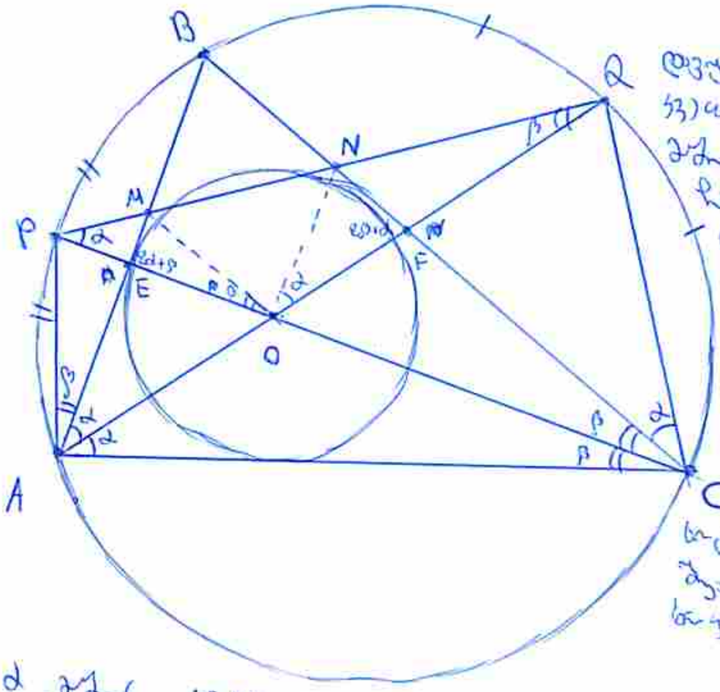
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 4

20.04.2013/ მათ/I/ 052

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



დავუშვათ ℓ წრის AB რკალის შუა P-ა, ხოლო BC რკალის Q-ა. მაშინ ვიცით O წერტილი არის ΔABC-ს ჩახაზული წრეწირის ცენტრი და CO არის ∠ACB-ს ბისექტრისა. ასევე CO გადაკვეთს ω წრეწირს AB რკალის შუაწერტილში, მაშინ როცა ℓ წრის AB რკალის შუაწერტილია, ამიტომ O, C და P ერთ წრფეზეა. ანალოგიურად, AO არის ∠CAB-ს ბისექტრისა და კვეთს CB რკალს შუაწერტილში ხოლო Q ℓ წრის BC რკალის შუაწერტილია ამიტომ A, O და Q ერთ წრფეზეა.

$\angle BAC \equiv 2\alpha$, მაშინ $\angle BAQ = \angle QAC = \alpha$, $\angle ACB \equiv 2\beta$, მაშინ $\angle BCP = \angle PCA = \beta$.
შევხედოთ Q და C წერტილებს და A და P წერტილებს. $\angle PQA$ ეყრდნობა PA რკალს და $\angle PCA$-ც ეყრდნობა PA რკალს ამიტომ $\angle PQA = \angle PCA = \beta$. ანალოგიურად $\angle QPC$ ეყრდნობა QC რკალს და $\angle QAC$-ც ეყრდნობა QC რკალს ამიტომ $\angle QPC = \angle QAC = \alpha$. ასევე $\angle PAB = PCB = \beta$ რადგან ორივე ეყრდნობა PB რკალს და $\angle BCQ = \angle BAQ = \beta$ რადგან ორივე ეყრდნობა BQ რკალს. დავუშვათ $PC \cap AB = E$ და $AQ \cap BC = F$ მაშინ $\angle MEO$ არის ΔAEC-ს გარე კუთხე ამიტომ $\angle MEO = \angle BAC + \angle ECA = 2\alpha + \beta$. ანალოგიურად $\angle NFO$ არის გარე კუთხე ΔAFC-ს გარე კუთხე ამიტომ $\angle NFO = \angle FAC + \angle FCA = 2\beta + \alpha$.
ახლა შევხედოთ ოთხკუთხედ APMO-ს. $\angle MAO$ და $\angle MPO$ ორივე α-ს ტოლია ამიტომ ოთხკუთხედი APMO-ს შემოიხაზება. მაშინ MO მონაკვეთზე ეყრდნობა $\angle MPO$ და $\angle MAO$ ორივე ეყრდნობა PM მონაკვეთს და $\angle MOP = \beta$. ოთხკუთხედი CQNO-ს, მაშინ $\angle MOP = \angle PAM = \beta$
მაშინ $\angle NQO = \angle NCO = \beta$ და ორივე ეყრდნობა NO მონაკვეთს ამიტომ ანალოგიურად ოთხკუთხედი CQNO შემოიხაზება
მაშინ $\angle NOQ = \angle NCQ = \alpha$ რადგან ორივე ეყრდნობა NQ მონაკვეთს. ანუ $\angle NOQ = \alpha$.
მაშინ $\Delta ABC \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$; $\Delta EMO \Rightarrow \angle EMO = 180^\circ - (2\alpha + \beta) - \beta$; $\Delta FNO \Rightarrow \angle FNO = 180^\circ - (2\beta + \alpha) - \alpha$
ანუ $\angle ABC = \angle EMO = \angle FNO = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ ამიტომ $BM \parallel NO$ და $BN \parallel MO$ ამიტომ OMBN-ი არის პარალელოგრამი. მაშინ ჩახაზული წრეწირის ცენტრი BO არის $\angle MBN$-ის ბისექტრისა რადგან O არის ΔABC-ს ჩახაზული ცენტრი ამიტომ $\Delta BOM \sim \Delta BON$, [illegible] OB [illegible]

მაგიდა № 4

20.04.2013/ მათ/I/ 052

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

ვინაიდან $\Delta OMB = \Delta ONB$ (OB გვერდი საერთო აქვთ და $\angle MBO = \angle NBO$ ბისექტრისიდან გამომდინარე და $\angle BMO = \angle BNO$ – პარალელოგრამიდან გამომდინარე) ამიტომ $BM = BN$ და $MO = NO$ მაგრამ $BM = ON$ და $BN = OM$ პარალელოგრამიდან გამომდინარე, ანუ $OM = MB = BN = NO$, ანუ მივიღეთ რომ ოთხკუთხედი $OMBN$ არის რომბი.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 4

20.04.2013/ მათ/I/ 052

ამოცანა № 2

[illegible] $f(1)=9$ [illegible] 9-ის [illegible] 2013-ის [illegible]: $2013=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+1$. [illegible] $P(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+1$ [illegible] $P(2)=2013$ [illegible] $P(1)=9$ და [illegible] $Q(1)=9$ და $Q(2)=2013$. [illegible] $Q(x)$-ის [illegible] 10 [illegible] $2^{11}>2013$. [illegible] $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. [illegible] $Q(x)$-ის [illegible] $Q(2)$ [illegible]: $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+2^2+1=a_{10}2^{10}+a_9 2^9+\ldots+a_1\cdot 2+a_0$ [illegible] 0 ან 1, [illegible] 2-ის [illegible] $2^k\cdot a_{k-1}$ [illegible] $a_k\geq 2$ [illegible] $2^{k+1}+(a_k-2)2^k$ [illegible] 2-ის [illegible] და [illegible] $a_{10}^1\cdot 2^{10}+a_9^1\cdot 2^9+a_8^1 2^8+\ldots+a_1^1\cdot 2+a_0^1$ [illegible] 10, [illegible] 2013 [illegible] 2-ის [illegible] $a_0+a_1+\ldots+a_{10}$ $=a_0+a_1+\ldots+a_{10}-1$, [illegible] და [illegible] $a_1+\ldots+(a_k-2)+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{10}+1=$ [illegible] 1-ით [illegible]. [illegible] და ~~[illegible]~~ $b_0, b_1, \ldots, b_{10}$ [illegible] 0-ის ან 1-ის. [illegible] $b_{10}2^{10}+\ldots+b_1\cdot 2+b_0$ [illegible]: $(2^k\cdot a_k=(a_k-2)2^k+2^{k+1})$ $b_{10}\cdot 2^{10}+\ldots+b_1\cdot 2+b_0=2013$ [illegible] 1 [illegible] 2013-ის [illegible] $b_{10}=b_9=b_8=b_7=b_6=b_4=b_3=b_2=b_0=1$ და $b_5=b_1=0$.

მაგიდა № 4

20.04.2013/ მათ/I/ 052

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

მაშინ $b_{10}+b_9+\dots+b_0=9$. მაგრამ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] მთელი 1-ის. და $Q(x)\neq P(x)$ [illegible] $a_0+a_1+\dots+a_{10}>9$. მაგრამ $a_0+\dots+a_{10}=Q(1)=9$. ანუ $9>9$ რაც არ არის სწორი, ანუ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] და არ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] მრავალწევრი $Q(x)$ რომ $Q(x)\neq P(x)$; და $Q(1)=9$ და $Q(2)=2013$. [illegible] [illegible] [illegible] მრავალწევრი $f(1)=9$ და $f(2)=2013$ არის $P(x)$ ანუ [illegible] მრავალწევრი [illegible] [illegible] არის

$$\boxed{f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+1}$$

მაგიდა № 4

20.04.2013/ მათ/I/ 052

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

პირველ რიგში ვაჩვენოთ რომ $\boxed{k\le 805}$. ვთქვათ რომ k-სთვის [illegible] [illegible] [illegible]. მაშინ თუ განვიხილავთ $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k=S$ მაშინ S-სიმრავლეში იქნება სულ 2k ცალი განსხვავებული რიცხვი რადგან $A_i\cap A_j=\emptyset$, $1\le i\le k$ და $1\le j\le k$ და $i\neq j$. მაშინ ეს S სიმრავლის ელემენტების ჯამი იქნება მინიმუმ $1+2+3+\ldots+2k=\frac{2k(2k+1)}{2}$ ანუ თუ S სიმრავლის ელემენტების ჯამს აღვნიშნავთ B-თი $\frac{2}{}$ მაშინ $B\ge 1+2+\ldots+2k$ ანუ $B\ge\frac{2k(2k+1)}{2}$. მეორეს მხრივ [illegible] ეს 2k ცალი ელემენტი არის [illegible] [illegible] k ცალ [illegible] [illegible] [illegible] 2013-ზე, ამიტომ $B\le 2013+2012+\ldots+[2013-(k-1)]$ ([illegible]) და [illegible] [illegible] [illegible]

$$2013+2012+\ldots+[2013-(k-1)]=(1+2+\ldots+2013)-(1+2+\ldots+(2013-k))=$$

$$=\frac{2013\cdot2014}{2}-\frac{(2013-k)(2014-k)}{2}=\frac{2013\cdot2014-2013\cdot2014+2013k+2014k-k^2}{2}=$$

$$=\frac{4027k-k^2}{2}$$ ანუ $B\le\frac{4027k-k^2}{2}$ და მივიღეთ რომ

$$\frac{4027k-k^2}{2}\ge B\ge\frac{2k(2k+1)}{2}\Rightarrow\frac{4027k-k^2}{2}\ge\frac{4k^2+2k}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4025k\ge 5k^2\Rightarrow\boxed{k\le 805.}$$

k=805-სთვის მაგალითი [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] იქნება. ანუ k=805 [illegible] [illegible] [illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 54-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 4

20.04.2013/ მათ/I/ 052

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ავიღოთ სამი მიმდევრობა: $C_1 = 1610; 1609; 1608; \dots; 807; 806$. $C_2 = 2; 4; 6; 8; \dots; 804$ და $C_3 = 1; 3; 5; \dots; 803; 805$. ვთქვათ C_1-ში, C_2-ში და C_3-ში არის ზუსტად $1610 = 2k$ ცალი [illegible]. მაშინ ჩვენი სიმრავლეები ავიღოთ შემდეგნაირად. $A_1 = \{1610; 2\}$; $A_2 = \{1609; 4\}$; $\dots$; $A_{402} = \{1209; 804\}$ შემდეგ $A_{403} = \{1208, 1\}$; $A_{404} = \{1207; 3\}$; $A_{405} = \{1206; 5\}$; $\dots$; $A_{805} = \{806, 805\}$

ანუ [illegible] C_1 მიმდევრობის და [illegible] C_2 და C_3 მიმდევრობების. [illegible] C_1-ში არის ზუსტად [illegible] C_2-ში და C_3-ში [illegible] და [illegible] სიმრავლეები. ანუ, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{805}$ სიმრავლეების [illegible]: $A_i \cap A_j = \emptyset$ თუ $1 \le i \le 805$; $1 \le j \le 805$ და $i \ne j$ და მაშინ თუ $[A]$-თი ავღნიშნავთ A-სიმრავლის ელემენტთა ჯამს მაშინ $[A_1] = 1612$, $[A_2] = 1613$; $[A_3] = 1614$; $\dots$; $[A_{402}] = 2013$ და $[A_{403}] = 1209$; $[A_{404}] = 1210$; $[A_{405}] = 1211$; $\dots$; $[A_{805}] = 1611$. ანუ $\{[A_1]; [A_2]; [A_3], \dots, [A_{805}]\} = \{1209, 1210, 1211, \dots, 2013\}$ მაშინ $[A_i] \ne [A_j]$ თუ $1 \le i \le 805$; $1 \le j \le 805$ და $i \ne j$ და მაშინ $[A_t] \le 2013$ თუ $1 \le t \le 805$. ანუ ეს შესაძლებელი [illegible] როცა $k = 805$ ✓. მაშინ [illegible] $k \le 805$ მაშინ k-ს მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობაა 805.

პასუხი: k-ს მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობაა 805.